# 整数表現に関連したゼータ関数について : Bushnell-Reinerの仕事の紹介(群の整数表現及び関連する問題の研究)

AUTHOR(S):

竹ヶ原, 裕元

数理解析研究所講究録
549巻 1985年 144-158



# 整数表現に関連したゼータ関数について
## ( Bushnell-Reiner の仕事の紹介 )

北大理　　竹ヶ原　裕元
( Yugen-Takegahara )

Solomon のゼータ関数に関しての Bushnell-Reiner による数多くの仕事のうち，ここでは Solomon の予想に関するものと，有限群 $G$ が与えられたときの $\mathbb{Z}G$ のゼータ関数の計算についての仕事を紹介します。

まず，Solomon のゼータ関数の諸性質を見てゆきます。

$\Lambda$: a $\mathbb{Z}$-order in a f.d. semisimpl $\mathbb{Q}$-algebra $A$

$L$: a full $\Lambda$-lattice in a f.g. left $A$-module $V$

定義 ( Solomon のゼータ関数 ) $s$ を複素変数，

$$\zeta_L(s) := \sum_N (L:N)^{-s}$$

，$N$ は $L$ に含まれる full $\Lambda$-lattice 全体を動く.

この関数は $\mathrm{Re}(s) > \dim_{\mathbb{Q}} V$ で確かに収束し，意味を持ちます。特に $V = A = \mathbb{Q}$，$L = \Lambda = \mathbb{Z}$ とすると，Liemann のゼータ関数，$F$ を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体，$R$ をその整数環として，$V = A = F$，$L = \Lambda = R$ とするとき，

Dedekindのゼータ関数にそれぞれ一致します。また、

$A=\mathbb{Q}$, $\Lambda=\mathbb{Z}$, $V=\mathbb{Q}^n$, $L=\mathbb{Z}^n$, とすると、

$$\zeta_L(s)=\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}}(s-1)\cdots\zeta_{\mathbb{Z}}(s-n+1)$$

$\zeta_{\mathbb{Z}}(s)$ は Riemann のゼータ関数

となっています。

Local case でもゼータ関数が定義されますが、特に、simple $\mathbb{Q}_p$-algebra の maximal $\mathbb{Z}_p$-order で定義されるゼータ関数について "Hey's formula" が知られています。

"Hey's formula"

$B:=M_n(D)$, $D$ は f.d. division $\mathbb{Q}_p$-algebra

$\Gamma$ : maximal $\mathbb{Z}_p$-order in $B$

$W$ : $k$-copies of simple left $B$-module

$M$ : a full $\Gamma$-lattice in $W$

$e:=\sqrt{\dim_F D}$, $F$ は $D$ の中心, その整数環を $R$

$\Rightarrow$ $\zeta_M(s)=\prod_{i=0}^{k-1}\zeta_R(nes-ei)$, $\zeta_R(s)$ は Dedekind のゼータ関数

一般の場合も、maximal order 上の lattice のゼータ関数は扱い易く（maximal order は algebra の Wedderburn 分解に関して、simple algebla の

maximal order の直和として表わされる。lattice もそれに従い直和として表わされ，ゼータ関数はその直和因子のゼータ関数の積になっている。)、次に述べる"Euler product"とともに，ゼータ関数の性質を調べる上で重用な働きをします。

$p$ の添字で $p$-進完備化，$(p)$ の添字で局所化をあらわすと，$\Lambda_p$ は $\mathbb{Q}_p$-algebra $A_p$ の $\mathbb{Z}_p$-order，$L_p$ は left $A_p$-module $V_p$ の full $\Lambda_p$-lattice となり $\zeta_{L_p}(s)$ が定義され，同様に，$\zeta_{L_{(p)}}(s)$ も定義されます。このとき

$$\zeta_{V_p}(s) = \zeta_{V_{(p)}}(s)$$

が示されて，さらに

"Euler product" $\zeta_V(s) = \prod_p \zeta_{V_p}(s)$ が成り立ちます。

Liemann のゼータ関数，あるいは，Dedekind のゼータ関数の Euler product は知られていますが，これはその拡張となっています。

$\Gamma$ を $\Lambda$ を含む maximal order，$B := \{p : 素数 \mid \Gamma_p \neq \Lambda_p\}$ $(|B| < \infty)$ とおくと，"Euler product" より

$$\zeta_L(s) = \prod_{p \in B} \zeta_{L_p}(s) / \zeta_{\Gamma_p \cdot L_p}(s) \cdot \zeta_{\Gamma L}(s)$$

が得られます。($\Gamma_p L_p$, $\Gamma \cdot L$ は $\Gamma$-lattice と考える。)

## §1 Solomonの予想

$A, \Lambda, V, L$は先の定義に従うものとします。いま，

$A = \prod_{i=1}^{r} A_i$，$A_i$はWedderburn component.

$A_i = M_{n_i}(D_i)$，$D_i$はdivision $\mathbb{Q}$-algebra

$V_i = A_i V$，$k_i$-coppies of simple left $A$-module

$e = \sqrt{\dim_{F_i} D_i}$，$F_i$は$D_i$の中心，その整数環を$R_i$.

として，次の関数を定義します。

$\zeta_V(s) := \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{k_i e_i - 1} \zeta_{R_i}(n_i e_i s - j)$，$s$は複素変数

この関数はDedekindのゼータ関数により定義されていますから，そのEuler productにより，"p-part"が考えられ，それを$\zeta_{V,p}(s)$と表わすと，

$\zeta_V(s) = \prod_p \zeta_{V,p}(s)$

と，"Euler product"が考えられます。さらに，

定理（ Solomon[1] ）

素数から成る有限集合$B$があり，

$\zeta_L(s) = \prod_{p \in B} \zeta_{L_p}(s) / \zeta_{V,p}(s) \cdot \zeta_V(s)$，　特に，

$\zeta_{L_p}(s) / \zeta_{V,p}(s)$，は$\mathbb{Q}$上$p^{-s}$の，有理関数である。

"Solomonの予想"

$\zeta_{L_p}(s) / \zeta_{V,p}(s) \in \mathbb{Z}[p^{-s}]$

この予想は，Λがmaximal orderならば，"Hey's formula"より，$\Lambda=\mathbb{Z}G$，Gは素数位数の巡回群ならば計算により，それぞれ正しいことが知られていました。その後，Bushnell-Reiner[1]は，より"強い形"で，肯定的に，この予想を証明しました。

$\Lambda$: a $\mathbb{Z}_p$-order in a f.d. semisimple $\mathbb{Q}_p$-algebra $A$

$L$: a full $\Lambda$-lattice in a f.g. left $A$-module $V$.

定理（Bushnell-Reiner[1]）

Γを Λを含む maximal $\mathbb{Z}_p$-order とすると，

$$\zeta_L(s)/\zeta_{\Gamma L}(s)\in\mathbb{Z}[p^{-s}]$$

先に述べた事と，この定理より，ただちに，Solomonの予想が解かれます。以下Bushnell-Reinerによる，この定理の証明を，簡単に説明します。

[証明の概略]

$X=\{M_1,\cdots,M_n\}$ をVの中のfull Λ-latticeの同型類の代表全体の集合とします。（$|X|<\infty$）$M\in X$に対して，次の関数を定義します。sを複素変数として，

$$Z_L(M;s):=\sum(L:N)^{-s}$$ ，NはMと同型なLに含まれるfull latticeを動く。

明らかに，$\zeta_L(s)=\prod_{i=1}^{r} Z_L(M_i;s)$ を得ます。記号，

$B:=\mathrm{End}_A V$ ，$B^\times:=\mathrm{Aut}_A V$

$\{M:L\}:=\{x\in B \mid Mx\subseteq L\}$ ・・・ $\mathbb{Z}_p$-lattice in $B$

$\mathrm{Aut}_A M:=\{x\in B \mid Mx=M\}$ ・・・ unit group of $\mathbb{Z}_p$-order in $B$

を用いて，$Z_L(M;s)$ を

$Z_L(M;s)=\Sigma(L:Mx)^{-s}$ ，$x$ は $\mathrm{Aut}_A M\backslash\{M:L\}\cap B^\times$ の代表全体を動く．

と変形し，さらに $V$ の中の任意の full $\mathbb{Z}_p$-lattice $X,Y$ に対して，新しい index $(X:Y)=(X:X\cap Y)/(Y:X\cap Y)$ を導入し，$x\in B^\times$ の norm を，$\|x\|=(Mx:M)$（$M$ は任意の full $\mathbb{Z}_p$-lattice してよい。）と定義すると，

$(L:Mx)=(L:M)\cdot(M:Mx)=(L:M)\cdot\|x\|^{-1}$ より，

$Z_L(M;s)=(L:M)^{-s}\,\Sigma\,\|x\|^{s}$ ，$x\in \mathrm{Aut}_A M\backslash\{M:L\}\cap B^\times$

と表わされます。

いま，$B$ に $\mathbb{Q}_p$-space としての位相（$\mathbb{Z}_p$-lattice は $0$ の compact open neighborhood）を導入すると，$B^\times$ はその subset top. で，locally compact な位相群と考えられる。そこで $B^\times$ の Haar 測度，$d^\times x$（その measure を $\mu^\times$，$\mu^\times(\mathrm{Aut}_A M)$ は $0$ でない有限の値をもつ。）を用い

て，$Z_L(M;s)$ は，

$$Z_L(M;s)=\mu^\times(\mathrm{Aut}_\Lambda M)(L:M)^{-s}\int_{B^\times}\Phi_{\{M:L\}}(x)\|x\|^s d^\times x$$

と考えられます。ここで $\Phi_{\{M:L\}}$ は $B$ の中での $\{M:L\}$ の char. function。

補題（Bushnell-Reiner[1]）

$\Phi$ を $B$ 上の Schwartz-Bruhat function（i.e. locally constant な compact support をもつ複素数値関数）とすると，

$$\{\zeta_{\Gamma L}(s)\}^{-1}\int_{B^\times}\Phi(x)\|x\|^s d^\times x\in\mathbb{C}[p^s,p^{-s}]$$

証明は，まず，$B$ が simple algebra，$\Phi$ が $\mathrm{End}_\Gamma(\Gamma L)$ の部分集合 $x+p^f\mathrm{End}_\Gamma(\Gamma L)$，${}^\exists f\geq 0$，の場合に帰着させ最終的には，"Hermite normal form" 的な行列の操作で証明を与えています。

さて，補題より，$\{\zeta_{\Gamma L}(s)\}^{-1}Z_L(M;s)\in\mathbb{C}[p^s,p^{-s}]$ が得られますが，一方定義から，$\{\zeta_{\Gamma L}(s)\}^{-1}Z_L(M;s)\in\mathbb{Z}[[p^{-s}]]$（形式的巾級数の環）となっていますから，ただちに定理の主張を得ます。

## §2 有限群のゼータ関数

$G$を有限群，$\Gamma$を$\Lambda=\mathbb{Z}G$を含む$\mathbb{Q}G$のmaximal orderとすると，$G$の位数を割らない素数$p$に対して，$\Lambda_p=\Gamma_p$となり，Euler productより

$$\zeta_\Lambda(s)=\prod_{p\mid |G|}\zeta_{\Lambda_p}(s)/\zeta_{\Gamma_p}(s)\cdot\zeta_\Gamma(s)$$

を得ますから，$\zeta_\Lambda(s)$の計算は$\varphi_p(s)=\zeta_{\Lambda_p}(s)/\zeta_{\Gamma_p}(s)$の計算に帰着します。また，先の定理の系として，"$\zeta_{\Lambda_p}(s)$は全平面で定義された有理形関数に解析接続される"ことがわかりますが，そのとき次の関数等式に関する定理が，simple $\mathbb{Q}_p$-algebra上で定義されたzeta integralの関数等式から導かれます。

定理（Bushnell-Reiner [1]）

$$\zeta_{\Lambda_p}(s)/\zeta_{\Lambda_p}(1-s)=(\Gamma_p:\Lambda_p)^{1-2s}\cdot\zeta_{\Gamma_p}(s)/\zeta_{\Gamma_p}(1-s) \quad \text{—} .$$

定理から，$\varphi_p(s)=(\Gamma_p:\Lambda_p)^{1-2s}\cdot\varphi_p(1-s)$が導かれ，これより，$\varphi_p(s)=\sum_{i=0}^{n}a_i p^i$，$(\Gamma_p:\Lambda_p)=p^m$とおくと，$n=2m$，$a_{2m-i}=a_i\cdot p^{m-i}$，$i=0,\cdots,m$となり，$\varphi_p(s)$に関する情報を与えています。実際に$\zeta_\Lambda(s)$が計算された例としては，$G$が位数$p$，$p^2$（$p$は素数）の巡回群，位数$2p$（$p$は奇素数）の二面体群と，広中[1]で示されたmetacyclic groupの場合があり，以下最初の2つの例を紹介します。

## (I) 位数が $p, p^2$ ($p$は素数)の巡回群のゼータ関数

ここで述べる内容はReiner[1]に依ります。以下 $p$ の添字で局所化(完備化ではなく)を示します。さて、$G=\langle\sigma \mid \sigma^{p^n}=1\rangle$, $H=\langle\tau \mid \tau^{p^{n-1}}=1\rangle$ とおくと、まず、

$\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\omega_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}(\omega_n)$, $\omega_i$は1の原始$p^i$乗根であり、maximal $\mathbb{Z}$-orderは、$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\omega_1] \oplus \cdots \mathbb{Z}[\omega_n]$ に同型であることがわかります。また、$\mathbb{Z}_pG$ の full idealを調べるために、次の自然なfibre product を考えます。

$$
\begin{array}{ccc}
\Gamma = \mathbb{Z}_pG & \longrightarrow & S = \mathbb{Z}_p[\omega_n] \\
\downarrow & & \downarrow g_1 \\
\Lambda = \mathbb{Z}_pH & \xrightarrow[g_2]{} & \bar{\mathbb{Z}}H \quad , \quad \bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}
\end{array}
$$

これより、$\Gamma = \{(x, y) \in S \times \Lambda \mid g_1(x) = g_2(y)\}$ と表わされます。いま $I$ を $\Gamma$ の full idealとして、$I$ に対して $\Lambda$ の full ideal $J$を、$J = \{y \in \Lambda \mid (0, py) \in I\}$ と定義します。このとき、或る、$g_1((1-\omega_n)^r) = g_2(y)$を満たす、$r \geq 0$, $y \in J$ があり、$I = \Gamma((1-\omega_n)^r, y) + (0, pJ)$ と表わされます。逆にこのような、$J, y, r$ に対して、$\Gamma$の full ideal $I = \Gamma((1-\omega_n)^r, y) + (0, pJ)$ が定義されます。この対応により、$\Gamma$ の full ideal $I$は次のデータで完全に決定されます。

$$I=\Gamma((1-w_n)^r, y)+(0, pJ)$$

(i) $J$ は $\Lambda$ の full ideal

(ii) $r$ は $g_1((1-w_n)^r)\in g_2(J)$ であるような正整数

(iii) $y\in J$ は $g_2(y)=g_1((1-w)^r)$ である mod $pJ$ の代表

特に，$\Gamma=T(1,1)+(0,p\Lambda)$ より，上の $I$ について，

$$(\Gamma : I)=p^r\cdot(\Lambda : J)$$

となります。また、$N_J$ を $J, r$ が与えられたときの，$y$ の取りちの数とすると，$k_J$ を $g_2(J)=(1-\tau)^{k_J}\mathbb{Z}H$ で定義するとき，

$$N_J=|J\cap p\Lambda : pJ|=|J:pJ|/|J+p\Lambda : p\Lambda|=p^{p^{n-1}}/p^{p^{n-1}-k_J}$$
$$=p^{k_J}$$

これより

$$\zeta_T(s)=\sum_J p^{k_J}\sum_{r\geq k_J}\{p^r(\Lambda : J)\}^{-s}$$

さて，この"公式"により $n=1,2$ の場合で計算されています。$n=1$ のときは，$\Lambda=\mathbb{Z}_p$ で $J$ は，$J=p^t\mathbb{Z}_p$，$t\geq 0$ と表わされ，$t=0\Rightarrow k_J=0$，$t\geq 1\Rightarrow k_J=1$ だから

$$\zeta_T(s)=\sum_{r\geq 0}p^{-rs}+p\sum_{t\geq 1}\sum_{\geq 1}p^{-(\ +t)s}$$
$$=(1-p^{-s}+p^{1-2s})\,\zeta_{\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p[w_1]}(s)$$

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s)=(1-p^{-s}+p^{1-2s})\cdot\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}[w_1]}(s)$$

が得られます。なお $n=1$ の場合は Solomon[1]，Bushnell-Reiner[1] でも計算されています。

$n=2$ のとき $\Gamma$ の full ideal $I$ は

$$I=\Gamma((1-\omega_2)^m, z)+(0, pJ), \quad z\in J$$

$$J=\Lambda((1-\omega_1)^r, y)+(0, p^{t+1}\mathbb{Z}_p), \quad r\geq k_{p^t\mathbb{Z}_p}$$

$$\begin{cases} t=0, r=0 \Rightarrow y=1, \quad t=0, r\geq 1 \Rightarrow y=0 \\ t\geq 1 \Rightarrow y=0, p^t, \cdots, (p-1)p^t \end{cases}$$

として得られ，$(\Gamma : I)=p^{r+m+t}$ さらに

$$t=0 \Rightarrow k_J=\mathrm{Min}(r, p-1)$$

$t=1 \Rightarrow r<p-1$ で $k_J=r$

$r\geq p-1$ で $p-1$ 個の $y$ について

$k_J=p-1$，1 個の $y$ について

$k_J=p$

$$t\geq 2 \Rightarrow k_J=\mathrm{Min}(r, p)$$

となっています。以下計算を示すと，

$$\begin{aligned} \zeta_\Gamma(s) = & \sum_{r=0}^{p-1}\sum_{m\geq r} p^r\cdot p^{-(r+m)s} + \sum_{r=p}^{\infty}\sum_{m\geq p-1} p^{p-1}p^{-(m+r)s} \\ & + p\cdot\sum_{r=1}^{p-2}\sum_{m\geq r} p^r p^{-(m+r+1)s} + (p-1)\sum_{r\geq p-1}\sum_{m\geq p-1} p^{p-1}p^{-(m+r+1)s} \\ & + \sum_{r\geq p-1}\sum_{m\geq p} p^p\cdot p^{-(m+r+1)s} \\ & + p\sum_{r=1}^{p}\sum_{t\geq 2}\sum_{m\geq r} p^r\cdot p^{-(m+r+t)s} \\ & + p\sum_{r\geq p+1}\sum_{t\geq 2}\sum_{m\geq p} p^p\cdot p^{-(m+r+t)s} \\ = & \cdots \end{aligned}$$

となるわけですけれど，結果は非常に複雑なものとなっています。

(II) $G=\langle \sigma, \tau \mid \sigma^2=\tau^p=1,\ \sigma\tau\sigma=\tau^{-1}\rangle$, $p$ は奇素数

のゼータ関数

ここでは，Bushnell-Reiner [2]の紹介をします。

$\omega$：1の原始 $p$-乗根

$L:=\mathbb{Q}(\omega)$, $K:=\mathbb{Q}(\omega+\omega^{-1})$

$S:=\mathbb{Z}[\omega]$, $R:=\mathbb{Z}[\omega+\omega^{-1}]$

$H:=\langle \rho \mid \rho^2=1\rangle$ … 位数 2 の巡回群.

$S\circ H$: twisted group ring

… $R$-order in $K$-algebra $L\circ H \cong M_2(K)$.

まず，$\mathbb{Q}G\cong\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus M_2(K)$ で，$\mathbb{Z}G$ を含む maximal order は $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus M_2(R)$ と同型です。さらに，fibre product,

$$(*)\cdots\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}G & \longrightarrow & S\circ H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}H & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Z}}H \end{array}$$

を考えます。

―$\varphi_2(s)$ の計算―

(*)を 2 で局所化すると，$\mathbb{Z}_2G\cong\mathbb{Z}H\oplus S\circ H$ を得ます。（これは $p\neq 2$ による。）ここで，$S_2\circ H$ が $L\circ H$ の maximal $R_2$-order である（Auslander-Goldman の仕事による。）ことに注意すると，(I)の結果より，

$$\varphi_2(s)=\zeta_{\mathbb{Z}_2H}(s)/\zeta_{\mathbb{Z}_2}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}_2}(s)=1-2^{-s}+2^{1-2s}$$

を得ます。

— $\varphi_p(S)$の計算 —

(※)を $p$ で局所化して，

fibre product

$$\begin{array}{ccc} \Gamma = \mathbb{Z}_pG & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{Z}_pH = \mathbb{Z}_pe_1 \oplus \mathbb{Z}_pe_2 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \quad e_1 = \frac{1-\rho}{2}, e_2 = \frac{1+\rho}{2} \\ \Lambda = S_p \circ H & \xrightarrow[g_2]{} & \bar{\mathbb{Z}}H \end{array}$$

を考えます。ここで，$\Lambda$ は $L \circ H$ の hereditary order (Auslander-Rim の仕事による。) ですから，$\pi$ を $R_p$ の prime element ( $S_p, R_p$ は d.v.r.) とすると，$|R_p : \pi R_p| = p$ で，$\Lambda \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in R_p \right\} = T \subset M_2(K)$ となります。

$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_pH \times \Lambda \mid g_1(x) = g_2(y)\}$ と表わし，$\mathbb{Z}_pH$ の full ideal が，$\mathbb{Z}_pHx$，$x = p^k e_1 + p^\ell e_2$ $k, \ell \geqq 0$，で全て得られることと，$\ker g_2 = (1-\omega)\Lambda$ に注意すると，(I) と同様に $\Gamma$ の full ideal は $\mathbb{Z}_pH$ と $\Lambda$ の情報から次のように決定されます。

$I = \Gamma(a, b) + (0, (1-\omega)J)$

(i) $J$ は $\Lambda$ の full ideal

(ii) $g_1(a) \in g_2(J)$ となる $a = p^k e_1 + p^\ell e_2$

(iii) $b \in J$ は $g_2(b) = g_1(a)$ である mod $J$ の代表.

さらに，$(\Gamma : I) = p^{k+\ell} \cdot (\Lambda : J)$ で，与えられた $J, a$, に対する $b$ の取り方の数 $N_J$ は，

$$N_J = |J \cap (1-\omega)\Lambda : (1-\omega)J| = p^2 / |J + (1-\omega)\Lambda : (1-\omega)\Lambda|.$$

これより$\Lambda$を$T$と同一視して考えます。与えられた$T$の元に対応する$\Lambda$の元の$g_2$による像は、行列の対角成分を$\mathrm{mod}\,\pi R_p$で考えた$\mathbb{Z}$の元を，$\mathbb{Z}H$の$\mathbb{Z}$-basis. $e_1, e_2$の係数として得られる$\mathbb{Z}H$の元に一致します。

さて，$T$のfull idealの同型数の代表は

$$T,\ \pi M_2(R_p),\ K = \left\{ \begin{pmatrix} \pi a, & \pi b \\ c, & d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in R_p \right\}$$

となっていることから，$T$のfull idealは次の3 typeで完全に決まります。

(i) $J = Tx$, $x \in T^{\times} \backslash T \cap GL_2(k)$

(ii) $J = M_2(R_p)x$, $x \in GL_2(R_p) \backslash \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi b \\ c & \pi d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \in R_p \right\} \cap GL_2(k)$.

(iii) $J = Kx$, $x \in GL_2(R_p) \backslash M_2(R_p) \cap GL_2(k)$

さらに，各々のtypeで，下に示す表のように，代表$x$の取り方が決まります。同時に$g_1(\alpha) \in g_2(J)$となる，$\alpha$も決まり，$(1-\omega)\Lambda = \mathrm{rad}\Lambda$ですから，与えられた$J$に対する$N_J$も決定されます。($\nu$で$R_p$の元のex. val. を表わします。) 表をもとに$\varphi_p(s)$を計算すると，

| $J$ | $x$ | $\lvert T:J \rvert$ | $N_J$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| $Tx$ | $\begin{pmatrix} 0 & \pi^n \\ \pi^m & d \end{pmatrix}$ $m \geq 0$, $n \geq 1$, $d \in R_p/\pi^n$ | $p^{2(m+n)}$ | $p$ if $\nu(d) = 0$<br>$p^2$ if $\nu(d) > 0$ | $k \geq 1, \ell \geq 0$<br>$k, \ell \geq 1$ |
| $Tx$ | $\begin{pmatrix} \pi^m & \pi b \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$ $m \geq 0$, $n \geq 0$, $b \in R_p/\pi^n$ | $p^{2(m+n)}$ | $1$ if $m = n = 0$<br>$p$ if $\begin{cases} m = 0, n > 0 \\ n = 0, m > 0 \end{cases}$<br>$p^2$ if $m, n > 0$ | $k, \ell \geq 0$<br>$k \geq 0, \ell \geq 1$<br>$k \geq 1, \ell \geq 0$<br>$k, \ell \geq 1$ |
| $M_2(R_p)x$ | $\begin{pmatrix} \pi^m & \pi b \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$ $m \geq 0$, $n \geq 1$, $b \in R_p/\pi^{n-1}$ | $p^{2(m+n)-1}$ | $p$ if $m = 0$<br>$p^2$ if $m > 0$ | $k \geq 0, \ell \geq 1$<br>$k, \ell \geq 1$ |
| $K \cdot x$ | $\begin{pmatrix} \pi^m & b \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}$ $m \geq 0$, $n \geq 0$, $b \in R_p/\pi^n$ | $p^{2(m+n)+1}$ | $p$ if $n = 0$ or $\nu(b) = 0$<br>$p^2$ if $n, \nu(b) > 0$ | $k \geq 1, \ell \geq 0$<br>$k, \ell \geq 1$ |

定理 ( Bushnell-Reiner [2] )

$$\zeta_{\mathbb{Z}G}(s) = \varphi_2(s)\cdot\varphi_p(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_{\mathbb{Z}}(s)\cdot\zeta_R(2s)\cdot\zeta_R(2s-1)$$

$$\varphi_2(s) = 1-2^{-s}+2^{1-2s}$$

$$\varphi_p(s) = 1+(p-1)p^{-2s}+2\cdot p^{2-3s}+(p-1)p^{1-4s}+p^{3-6s}\ — .$$

## 文　　献


Bushnell-Reiner [1] Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjecture. Math. Z. 173, 135-161 (1980)

Bushnell-Reiner [2] Zeta functions of hereditary orders and integral group ring. Vis. Scholar's Lec.-1980. no.14. (1981)

広中 [1] Zeta functions of integral group rings of metacyclic groups. TSUKUBA J. Math. Vol.5, No.2 267-283 (1981)

Reiner [1] Zeta functions of integral representations. Comm. algebra 8 (10), 911-925 (1980)

Solomon [1] Zeta functions and integral representation theory. Advance in Math 26, 306-326 (1977)